can be used. For computational purposes the series can be cut off at a value of J such that

$$\frac{\dfrac{t^{2J+e}}{(2J+e)!\,(s+2J+1+e)!}}{\sum\limits_{j=0}^{J}\dfrac{t^{2j+e}}{(2j+e)!\,(s+2j+1+e)!}} < 10^{-n} \tag{51}$$

where the choice of n is dictated by the accuracy required.

General programs for the I_1 and I_2 integrals have been prepared and tested on ILLIAC, the electronic digital computer of the University of Illinois. For this computer, which has a speed comparable to many of the others in operation today, it was found that for 8 decimal digit accuracy and reasonable values of n, n', and m the calculation time is of the order of seconds (e. g. $n = n' = m = 2$, $I_1 \sim 1-4$ seconds, $I_2 \sim 2-12$ seconds). These results indicate that the formulae developed in this paper should be generally useful for the evaluation of one- and two-center moment integrals by means of high speed digital computers.

The authors wish to thank Mr. LARRY GEER and Mr. F. L. MINN for help in computing on a desk calculator the moment integrals used to check the accuracy of the ILLIAC programs.

Zur Theorie der Transporterscheinungen in Entladungen sehr hoher Stromdichte

Von H. SCHIRMER

Osram-Studiengesellschaft Berlin

(Z. Naturforschg. **14 a**, 318—323 [1959]; eingegangen am 17. November 1958)

Es wird die Theorie der Transporterscheinungen unter Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes — bei Anwesenheit eines longitudinalen Magnetfeldes — dargestellt. Die für ein LORENTZ-Gas gültigen Formelausdrücke lassen sich auf ein Plasma übertragen.

In Plasmen sehr hoher Stromdichte — neuerdings von verschiedenen Seiten untersucht — gewinnt das Eigenmagnetfeld für die Transporterscheinungen an Einfluß. Darüber hinaus wird zur Führung zylindrischer Entladungen häufig noch ein longitudinales Magnetfeld verwendet.

Im folgenden werden die Transporterscheinungen unter Berücksichtigung derartiger Magnetfelder untersucht. Die Überlegungen beziehen sich vorerst auf ein LORENTZ-Gas. Die Ausdrücke erscheinen daher in geschlossener leicht überschaubarer Form; der Übergang zum Plasma kann im Sinne einer Bemerkung in einer früheren Arbeit leicht bewerkstelligt werden (s. Abschnitt 4).

Für den Fall des Vorhandenseins eines Magnetfeldes hat schon GANS [1] — unter der Voraussetzung starrelastischer Kugeln als Streuzentren — ein Lösungsverfahren entwickelt, das sich jedoch durch einen geeigneten Ansatz (LORENTZ-Ansatz) vereinfachen läßt. Dabei wurde von GANS das Magnetfeld nur in der z-Richtung betrachtet. Die direkte Übertragung der GANSschen Methodik durch Einführung einer geschwindigkeitsabhängigen freien Weglänge ermöglichte die Abschätzung des Einflusses des Eigenmagnetfeldes einer Entladung [2].

Nun ist bekannt, daß sich die Transporterscheinungen in einem LORENTZ-Gas ohne Beschränkung auf starrelastische Kugeln durch die Einführung der geschwindigkeitsabhängigen „Transportquerschnitte" der Atome und Ionen gegenüber Elektronen exakt erfassen lassen [3, 4]. In der vorliegenden Arbeit wird in Erweiterung jener Ergebnisse gezeigt, daß dies auch für ein allgemein angesetztes Magnetfeld der Fall ist. Es werden die Komponenten der Stromdichte und des Wärmestroms einer zylindrischen Entladung vollständig bestimmt.

1. Die Lösung der Boltzmann-Gleichung eines Lorentz-Gases mit Magnetfeld für den Fall bestehender Zylindersymmetrie

Die BOLTZMANN-Gleichung eines LORENTZ-Gases mit Magnetfeld $\mathfrak{H}$ lautet — unter der Voraussetzung der Stationarität — in Zylinderkoordinaten (mit den Komponenten H_x, H_r, H_φ)

[1] R. GANS, Ann. Phys., Lpz. (IV) **20**, 293 [1906].
[2] H. SCHIRMER, Techn.-wiss. Abhandl. d. Osram-Ges. Bd. 7, S. 1, Berlin 1958.
[3] H. SCHIRMER, Z. Phys. **142**, 1 [1955].
[4] H. SCHIRMER, Z. Phys. **142**, 116 [1955].

$$(X+X_1)\frac{\partial(n_e f)}{\partial v_x}+(R+R_1)\frac{\partial(n_e f)}{\partial v_r}+(\Phi+\Phi_1)\frac{\partial(n_e f)}{\partial v_\varphi}+v_x\frac{\partial(n_e f)}{\partial x}+v_r\frac{\partial(n_e f)}{\partial r}+v_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial(n_e f)}{\partial\varphi} \tag{1}$$
$$= n_a n_e\left[v\iint(f'-f)\,a\,da\,d\varepsilon+\frac{n_i}{n_a}v\iint(f'-f)\,a\,da\,d\varepsilon\right]$$

mit $X=\frac{e}{m}G_x,\quad R=\frac{e}{m}G_r,\quad \Phi=\frac{e}{m}G_\varphi$ (2)

als elektrische und

$$X_1=\omega_\varphi v_r-\omega_r v_\varphi,\qquad R_1=\omega_x v_\varphi-\omega_\varphi v_x,\qquad \Phi_1=\omega_r v_x-\omega_x v_r \tag{3}$$

als magnetische Beschleunigungen; dabei ist

$$\omega_i=\frac{e}{m}\frac{H_i}{c}\quad(i=x,r,\varphi) \tag{4}$$

die jeweilige Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) eines Elektrons um die i-Richtung.

Zur Lösung der Gl. (1) wird die Geschwindigkeitsverteilung f der Elektronen angesetzt

$$f=f_0[1+v_x\psi_x(v)+v_r\psi_r(v)+v_\varphi\psi_\varphi(v)] \tag{5}$$

mit f_0 als ungestörter Boltzmann-Funktion.

Entsprechend erfolgt der Ansatz für f' als Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten v nach dem Stoß. Damit ergibt sich aus (1)

$$-\frac{2}{w^2}(X v_x+R v_r+\Phi v_\varphi)+(\omega_r\psi_\varphi-\omega_\varphi\psi_r)v_x+(\omega_\varphi\psi_x-\omega_x\psi_\varphi)v_r+(\omega_x\psi_r-\omega_r\psi_x)v_\varphi$$
$$-\left[\left(\frac{T}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial T}+1\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{v^2}{w^2}\right)\right]\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)v_x+\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)v_r+\frac{1}{T}\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)v_\varphi\right] \tag{6}$$
$$=-n_a v[v_x\psi_x+v_r\psi_r+v_\varphi\psi_\varphi]\left[Q_a(v)+\frac{n_i}{n_a}Q_i(v)\right].$$

Die Querschnitte $Q_a(v)$ der Atome und $Q_i(v)$ der Ionen gegenüber Elektronen sind früher definiert worden[3].

Durch Koeffizientenvergleich der (linear auftretenden) Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_r, v_φ kann (6) in drei Gleichungen zerlegt werden, aus denen die ψ_x, ψ_r, ψ_φ zu ermitteln sind. Es ergeben sich mit

$$\Lambda(v)=\frac{1}{n_a\left(Q_a(v)+\frac{n_i}{n_a}Q_i(v)\right)} \tag{7}$$

als „freie Weglänge" eines Elektrons der Geschwindigkeit v innerhalb eines Lorentz-Gases,

$$\tau(v)=\frac{\Lambda(v)}{v} \tag{8}$$

als „Zeitdauer zwischen zwei Zusammenstößen eines v-Elektrons mit den schweren Teilchen" bei Verwendung der Abkürzungen

$$N=1+(\omega_x^2+\omega_r^2+\omega_\varphi^2)\,\tau^2(v),$$

$$a_x=\tau(v)\left\{\frac{2}{w^2}X+\left[\left(\frac{T}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial T}+1\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{v^2}{w^2}\right)\right]\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right\},$$
$$a_r=\tau(v)\left\{\frac{2}{w^2}R+\left[\left(\frac{T}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial T}+1\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{v^2}{w^2}\right)\right]\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right\},$$
$$a_\varphi=\tau(v)\left\{\frac{2}{w^2}\Phi+\left[\left(\frac{T}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial T}+1\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{v^2}{w^2}\right)\right]\frac{1}{T}\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)\right\} \tag{9}$$

für ψ_x, ψ_r und ψ_φ die folgenden Ausdrücke:

$$\psi_x=\frac{1}{N}\{a_x[1+(\omega_x\tau(v))^2]+a_r[\omega_\varphi\tau(v)+\omega_x\tau(v)\cdot\omega_r\tau(v)]+a_\varphi[-\omega_r\tau(v)+\omega_x\tau(v)\cdot\omega_\varphi\tau(v)]\},$$
$$\psi_r=\frac{1}{N}\{a_r[1+(\omega_r\tau(v))^2]+a_\varphi[\omega_x\tau(v)+\omega_r\tau(v)\cdot\omega_\varphi\tau(v)]+a_x[-\omega_\varphi\tau(v)+\omega_r\tau(v)\cdot\omega_x\tau(v)]\}, \tag{10}$$
$$\psi_\varphi=\frac{1}{N}\{a_\varphi[1+(\omega_\varphi\tau(v))^2]+a_x[\omega_r\tau(v)+\omega_\varphi\tau(v)\cdot\omega_r\tau(v)]+a_r[-\omega_x\tau(v)+\omega_\varphi\tau(v)\cdot\omega_r\tau(v)]\}.$$

Mit Hilfe von (7) bis (10) lassen sich nun Stromdichte und Wärmestrom und damit die elektrische Leitfähigkeit und die Wärmeleitfähigkeit berechnen[3,4].

2. Die Berechnung der Stromdichte und des Wärmestroms in allgemeiner Form

Aus der Stromdichte
$$\mathfrak{j}_e = e\, n_e \int \mathfrak{v}\, f\, d\mathfrak{v} \tag{11}$$
und dem Wärmestrom
$$\mathfrak{W}_e = \frac{1}{2} m\, n_e \int v^2\, \mathfrak{v}\, f\, d\mathfrak{v} \tag{12}$$
ergeben sich gemäß (5) deren Komponenten

$$j_{ei} = \frac{1}{3} e\, n_e \int_0^\infty v^2 \psi_i F_0\, dv\,, \qquad W_{ei} = \frac{1}{6} m\, n_e \int_0^\infty v^4 \psi_i F_0\, dv \quad (i = x, r, \varphi)\,.$$

Mit Hilfe von (10) ergibt sich nun die Stromdichte bei Einfluß eines Magnetfeldes nach (3), (4)

$$\begin{aligned} j_{ex\,\omega_x\omega_r\omega_\varphi} &= e\, n_e \\ &\cdot \Big\{ \Big(b_{e\omega} G_x + D_{e\omega} \Big[\Big(\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \Big) - \frac{5}{2} \Big] \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial x} \Big) \Big) [1 + (\omega_x \bar\tau_{\sigma\omega})^2 \cdot q_{3,-1}] + D_{e\omega} \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial x} \Big) [A_\omega + (\omega_x \bar\tau_{\sigma\omega})^2 \cdot q_{31}] \\ &\quad + \Big(b_{e\omega} G_r + D_{e\omega} \Big[\Big(\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \Big) - \frac{5}{2} \Big] \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial r} \Big) \Big) (\omega_\varphi \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{20} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{3,-1}) \\ &\qquad + D_{e\omega} \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial r} \Big) (\omega_\varphi \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{22} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{31}) \\ &\quad + \Big(b_{e\omega} G_\varphi + D_{e\omega} \Big[\Big(\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \Big) - \frac{5}{2} \Big] \frac{1}{T} \frac{1}{r} \Big(- \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big) \Big) (- \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{20} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_\varphi \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{3,-1}) \\ &\qquad + D_{e\omega} \frac{1}{T} \frac{1}{r} \Big(- \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big) (- \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{22} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_\varphi \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{31}) \Big\} \end{aligned} \tag{13}$$

und der Wärmestrom

$$\begin{aligned} W_{ex\,\omega_x\omega_r\omega_\varphi} &= n_e\, k\, T \\ &\cdot \Big\{ \Big(b_{e\omega} G_x + D_{e\omega} \Big[\Big(\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \Big) - \frac{5}{2} \Big] \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial x} \Big) \Big) [A_\omega + (\omega_x \bar\tau_{\sigma\omega})^2 q_{31}] + D_{e\omega} \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial x} \Big) [q_{15} + (\omega_x \bar\tau_{\sigma\omega})^2 q_{33}] \\ &\quad + \Big(b_{e\omega} G_r + D_{e\omega} \Big[\Big(\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \Big) - \frac{5}{2} \Big] \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial r} \Big) \Big) (\omega_\varphi \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{22} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{31}) \\ &\qquad + D_{e\omega} \frac{1}{T} \Big(- \frac{\partial T}{\partial r} \Big) (\omega_\varphi \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{24} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{33}) \\ &\quad + \Big(b_{e\omega} G_\varphi + D_{e\omega} \Big[\Big(\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \Big) - \frac{5}{2} \Big] \frac{1}{T} \frac{1}{r} \Big(- \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big) (- \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{22} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_\varphi \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{31}) \\ &\qquad + D_{e\omega} \frac{1}{T} \frac{1}{r} \Big(- \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big) (- \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{24} + \omega_x \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot \omega_r \bar\tau_{\sigma\omega} \cdot q_{33}) \Big\}\,; \end{aligned} \tag{14}$$

hierbei ist mit $z = v/w$, $w = \sqrt{2\,k\,T/m}$,

$$q_{ij} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \bar\Lambda_{\sigma\omega} \right)^i} \int_0^\infty \Lambda^i(z)\, z^j\, F_{0\omega}\, dz\,, \tag{15}$$

$$\bar\Lambda_{\sigma\omega} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \Lambda(z)\, z\, F_{0\omega}\, dz\,, \tag{16}$$

$$F_{0\omega} = \frac{1}{N} F_0(z) = \frac{\frac{4}{\sqrt{\pi}} z^2 e^{-z^2}}{1 + \tau^2(z)\,(\omega_x^2 + \omega_r^2 + \omega_\varphi^2)}\,, \tag{17}$$

$$\bar\tau_{\sigma\omega} = \bar\Lambda_{\sigma\omega} \overline{\left(\frac{1}{v} \right)}\,; \tag{18}$$

$$b_{e\omega} = \frac{2}{3} \frac{e}{m} \bar\tau_{\sigma\omega}\,, \tag{19}$$

$$D_{e\omega} = \frac{1}{3} \bar v\, \bar\Lambda_{\sigma\omega}\,, \tag{20}$$

$$A_\omega = q_{13} \quad \text{(s. Anm. *)}. \tag{21}$$

$b_{e\omega}$ ist die Elektronenbeweglichkeit, $D_{e\omega}$ der Diffusionskoeffizient der Elektronen unter dem Einfluß eines Magnetfeldes.

Die Komponenten j_{er}, $j_{e\varphi}$ der Stromdichte und W_{er}, $W_{e\varphi}$ des Wärmestroms sind wegen der Symmetrie hier nicht aufgeführt. Sie ergeben sich analog durch zyklische Vertauschung der elektrischen Gradienten G_i, der ω_i und der Temperaturgradienten. Dabei ist natürlich der durch Einführung der Zylinderkoordinaten entstandene Term $(1/r)\,(-\partial T/\partial\varphi)$ als eine geschlossene Größe aufzufassen.

* A_ω ist für verschwindende ω_i mit der früher definierten Größe A identisch [4].

3. Stromtransport und Wärmetransport der Elektronen für ein zylindrisches Lorentz-Gas

Im folgenden werden Stromdichte und Wärmestrom, die durch (13) und (14) für ein allgemeines Magnetfeld angegeben sind, auf ein zylindrisches LORENTZ-Gas bezogen. Dieser Fall setzt das Bestehen der „Nebenbedingung“

$$j_{er} = 0\,, \qquad (22)$$

der Stromlosigkeit in radialer Richtung, voraus [4]. (22) gestattet die Berechnung der radialen Zwangsbeschleunigung $(e/m)\,G_r$, die in j_{ex} und W_{ex} einzusetzen ist.

Wegen der Zylindersymmetrie ist $G_\varphi = 0$, $\partial T/\partial \varphi = 0$ anzusetzen; weiterhin ist

$$\omega_r = 0\,, \qquad (23)$$

da ein Magnetfeld in radialer Richtung nicht vorhanden ist.

Es wird $$D_{\mathrm{eTh}\omega} = \left(A_\omega - \frac{5}{2}\right) D_{\mathrm{e}\omega} \qquad (24)$$

als Thermodiffusionskoeffizient der Elektronen,

$$\lambda_{\mathrm{e}\omega} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}k\right) n_{\mathrm{e}}\,\bar{v}\,\overline{\Lambda_{\lambda\omega}} \qquad (25)$$

als Elektronenwärmeleitfähigkeit eingeführt mit

$$\overline{\Lambda_{\lambda\omega}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_0^\infty \Lambda(z)\, z^3 (z^2 - A_\omega)\, F_{0\omega}\, \mathrm{d}z \qquad (26)$$

als (für die Wärmeleitung maßgebliche) „mittlere freie Weglänge“.

Die Definitionen (24) bis (26) entsprechen vollständig den entsprechenden Ausdrücken im Falle verschwindenden Magnetfeldeinflusses [4, 5].

Ausdruck (24) ist für $\omega = 0$ (verschwindendes Magnetfeld) in der Form

$$D_{\mathrm{eTh}} = (A - \tfrac{5}{2})\, D_{\mathrm{e}} \qquad (24\,\mathrm{a})$$

bereits früher [5] abgeleitet worden; (24 a) ist im Falle eines reinen LORENTZschen Gasgemisches vollkommen identisch mit einer von WALDMANN [6] abgeleiteten Beziehung

$$D_{\mathrm{Th}} = \left[\frac{T}{D}\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_p - 2\right] D\,, \qquad (24\,\mathrm{b})$$

da in einem Gas der Transportquerschnitt Q der schweren streuenden Atome unabhängig von der Temperatur T ist. Auch bei Plasmen sehr niedrigen Ionisierungsgrades kann diese Voraussetzung als näherungsweise erfüllt angesehen werden.

Allgemein ist jedoch bei Plasmen

$$Q(z,T) = Q_{\mathrm{a}}(z) + \frac{n_{\mathrm{i}}(T)}{n_{\mathrm{a}}(T)}\, Q_{\mathrm{i}}(z,T)\,,$$

mithin eine Temperaturabhängigkeit des Q vorhanden; für Plasmen ist daher wegen

$$\frac{T}{D_{\mathrm{e}}}\left(\frac{\partial D_{\mathrm{e}}}{\partial T}\right)_p - 2 = A - \frac{5}{2} - \frac{T}{\overline{\Lambda_\sigma}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{1}{Q(z)}\,\frac{\partial Q}{\partial T}\cdot \Lambda(z)\, z\, F_0(z)\, \mathrm{d}z$$

die WALDMANNsche Beziehung (24 b) nicht mehr vollständig identisch mit (24 a).

Im Falle vollständiger Ionisierung kann – sofern die geringe Temperaturabhängigkeit des Q_{i} (über Maximalparameter a_0) vernachlässigt wird – $\partial Q_{\mathrm{i}}/\partial T = 0$ gesetzt werden, ferner ist $n_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(p/k\,T)$; daher ist (24 b) wiederum (nahezu) mit (24 a) identisch [7].

Mit (24), (25) und (26) ergibt sich auf Grund der Bedingungen (22) und (23)

$$\begin{aligned} j_{ex\,\omega_x\omega_\varphi} = e\,n_{\mathrm{e}} \Bigg\{ &\left[b_{\mathrm{e}\omega} G_x + \left(D_{\mathrm{e}\omega}\left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}\omega}\right) \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right] \left[1 + (\omega_x \bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 q_{3,-1} + (\omega_\varphi \bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 q_{20}{}^2\right] \\ &+ D_{\mathrm{e}\omega}\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_\varphi\bar{\tau}_{\sigma\omega})\, q_{20} + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right](\omega_\varphi\bar{\tau}_{\sigma\omega})\,(q_{22} - A_\omega q_{20}) \\ &+ D_{\mathrm{e}\omega}\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_x\bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 (q_{31} - A_\omega q_{3,-1}) \Bigg\}, \end{aligned} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned} W_{ex\,\omega_x\omega_\varphi} = {} & \lambda_{\mathrm{e}\omega}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) \\ &+ n_{\mathrm{e}}\,k\,T \Bigg\{ \left[b_{\mathrm{e}\omega} G_x + \left(D_{\mathrm{e}\omega}\left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}\omega}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right] \left[A_\omega + (\omega_x\bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 q_{31} + (\omega_\varphi\bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 q_{20}\, q_{22}\right] \\ &+ D_{\mathrm{e}\omega}\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_\varphi\bar{\tau}_{\sigma\omega})\, q_{22}(\omega_\varphi\bar{\tau}_{\sigma\omega})\,(q_{22} - A_\omega q_{20}) + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)(\omega_\varphi\bar{\tau}_{\sigma\omega})\,(q_{24} - A_\omega q_{22})\right] \\ &+ D_{\mathrm{e}\omega}\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_x\bar{\tau}_{\sigma\omega})^2\,(q_{33} - A_\omega q_{31}) \Bigg\}, \end{aligned} \qquad (28)$$

[5] H. SCHIRMER u. J. FRIEDRICH, Z. Phys. **153**, 563 [1958].
[6] L. WALDMANN, Z. Naturforschg. **5 a**, 322 [1950].
[7] W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Handbuch der Physik **XXII**, 348 [1956].

$$W_{\mathrm{er}\omega_x\omega_\varphi} = \lambda_{\mathrm{e}\omega}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right) - n_{\mathrm{e}}\, k\, T \left\{\left[b_{\mathrm{e}\omega}\, G_x + \left(D_{\mathrm{e}\omega}\left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}\omega}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right](\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega})\,(q_{22} - A_\omega\, q_{20}) + D_{\mathrm{e}\omega}\,\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega})\,(q_{24} - 2\, A_\omega\, q_{22} + A_\omega^2\, q_{20})\right\}. \quad (29)$$

(27) bis (29) geben die Stromdichtekomponenten und die Komponenten des Wärmestroms eines zylindrischen LORENTZ-Gases unter Einwirkung eines Magnetfeldes an, das als Eigenmagnetfeld H_φ mit zusätzlichem (in der Längsrichtung einer Entladung verlaufendem) Magnetfeld H_x angesehen werden kann.

Diejenigen Größen in (27) bis (29), die den Index ω tragen, und die q_{ij} enthalten gegenüber (15) bis (21) natürlich ω_r nicht mehr wegen (23). Die vereinfachende Schreibweise ist jedoch wohl wegen der auf der linken Seite der Formeln angebrachten Indizes keinen Mißdeutungen ausgesetzt. Aus (27), (28) und (29) lassen sich nun alle weiteren Spezialfälle ablesen.

a) Eigenmagnetfeld allein wirkend, kein Longitudinalfeld, $\omega_x = 0$, $\omega_\varphi \neq 0$:

$$\left.\begin{aligned}
j_{\mathrm{ex}\,\omega_\varphi} &= e\, n_{\mathrm{e}} \left\{\left[b_{\mathrm{e}\omega_\varphi} G_x + \left(D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}\omega_\varphi}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right][1 + (\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})^2\, q_{20}{}^2]\right.\\
&\qquad \left. + D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})\, q_{20} + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right](\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})\,(q_{22} - A_{\omega_\varphi}\, q_{20})\right\},\\
W_{\mathrm{ex}\,\omega_\varphi} &= \lambda_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\\
&\quad + n_{\mathrm{e}}\, k\, T \left\{\left[b_{\mathrm{e}\omega_\varphi} G_x + \left(D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}\omega_\varphi}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right][A_{\omega_\varphi} + (\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})^2\, q_{20}\, q_{22}]\right.\\
&\qquad + D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_\varphi \tau_{\sigma\omega_\varphi})\, q_{22}\,(\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})\,(q_{22} - A_{\omega_\varphi}\, q_{20})\right.\\
&\qquad \left.\left. + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)(\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})\,(q_{24} - A_{\omega_\varphi}\, q_{22})\right]\right\},\\
W_{\mathrm{er}\,\omega_\varphi} &= \lambda_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\\
&\quad - n_{\mathrm{e}}\, k\, T \left\{\left[b_{\mathrm{e}\omega_\varphi} G_x + \left(D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}\omega_\varphi}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right](\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})\,(q_{22} - A_{\omega_\varphi}\, q_{20})\right.\\
&\qquad \left. + D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}\,\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\omega_\varphi\, \tau_{\sigma\omega_\varphi})\,(q_{24} - 2\, A_{\omega_\varphi}\, q_{22} + A_{\omega_\varphi}^2\, q_{20})\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

b) Magnetfeld in Längsrichtung einer Entladung, Eigenmagnetfeld vernachlässigbar, $\omega_x \neq 0$, $\omega_\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}
j_{\mathrm{ex}\,\omega_x} &= j_{\mathrm{ex}},\\
W_{\mathrm{ex}\,\omega_x} &= W_{\mathrm{ex}}, \qquad \text{[s. Anm. 5 und (32)]} \qquad (31)\\
W_{\mathrm{er}\,\omega_x} &= \lambda_{\mathrm{e}\omega_x}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right).
\end{aligned}$$

$j_{\mathrm{ex}\,\omega_x}$ und $W_{\mathrm{ex}\,\omega_x}$ erweisen sich in diesem Falle als unabhängig vom Magnetfeld, wie sich mit Hilfe der Definitionen (15) bis (21) und (24) bis (26) nachweisen läßt. Es ist dies jedoch auch direkt aus der BOLTZMANN-Gleichung (1) abzulesen.

c) Verschwindender Magnetfeldeinfluß, $\omega_x = 0$, $\omega_\varphi = 0$:

$$j_{\mathrm{ex}} = e\, n_{\mathrm{e}} \left\{b_{\mathrm{e}}\, G_x + \left(D_{\mathrm{e}}\left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right\},$$

$$W_{\mathrm{ex}} = \lambda_{\mathrm{e}}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{k\, T}{e}\, A\, j_{\mathrm{ex}}, \qquad W_{\mathrm{er}} = \lambda_{\mathrm{e}}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right), \quad (32)$$

wie bereits bekannt [3, 4, 5].

4. Die Transporterscheinungen in einem Plasma

Die in einem Plasma wirksame Wechselwirkung der Elektronen untereinander führt zu einer Modifizierung der Ausdrücke [5, 8]. Der Übergang von einem LORENTZ-Gas zu einem Plasma läßt sich anschaulich dadurch bewerkstelligen, daß in den Formeln (27) bis (29) $\tau_{\sigma\omega}$ als „mittlere Stoßzeit eines Elektrons innerhalb eines *Plasmas*" gelesen wird mit

$$\tau_{\sigma\omega} = l_{\sigma\omega}\left(\frac{1}{v}\right), \quad l_{\sigma\omega} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty l(z)\, z\, F_{0\omega}(z)\, \mathrm{d}z,$$

$$l(z) = 1 \Big/ n_{\mathrm{a}}\left(Q_{\mathrm{a}}(z) + \frac{1}{\gamma'}\frac{n_{\mathrm{i}}}{n_{\mathrm{a}}}\, Q_{\mathrm{i}}(z)\right)$$

[8] H. SCHIRMER u. J. FRIEDRICH, Z. Phys. **151**, 174, 375 [1958].

an Stelle der Ausdrücke (18), (16) und (7) mit passend gewähltem γ' zwecks Erfassung des Einflusses der Elektronenwechselwirkung [8].

In früheren Arbeiten [5, 8] ist eine Methode angegeben worden, die Transporterscheinungen in einem Plasma durch Lösung der BOLTZMANN-Gleichung mit Wechselwirkungsglied der Elektronen in direkter Form zu erfassen; an Stelle der geschlossenen Integralausdrücke der Theorie des LORENTZ-Gases treten dann Determinanten.

Die folgerichtige Erweiterung dieser Untersuchungen auf den hier vorliegenden Fall der Anwesenheit von Magnetfeldern soll in einer folgenden Arbeit durchgeführt werden.

Über den Einfluß longitudinaler Magnetfelder auf den linearen Pinch-Effekt

Von H. HEROLD, E. FÜNFER, G. LEHNER, H. TUCZEK und C. ANDELFINGER

Aus dem Laboratorium für Techn. Physik der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. **14 a**, 323—329 [1959]; eingegangen am 29. Dezember 1958)

Es wird der Einfluß von stabilisierenden magnetischen Longitudinalfeldern bis zu 1100 Gauß auf den linearen Pinch-Effekt untersucht. Die Entladungen erfolgen in Deuterium bei Drucken von 10^{-2} bis 10^{-1} Torr, bei Stromanstiegen von $6 \cdot 10^{11}$ A/sec und Strömen von etwa 300 kA. Gemessen wurde die longitudinale Flußänderung innerhalb einer Meßschleife zwischen Stromrückleiter und Entladungsgefäß. Neben einer Flußänderung durch das im Plasma eingefangene Längsfeld tritt zum Zeitpunkt der letzten Plasmakontraktion eine starke Flußzunahme auf, die $(m=1)$-Instabilitäten zugeschrieben wird. Der Schraubensinn dieser Instabilitäten ist bei Stabilisierungsfeldern über 300 Gauß durch deren Richtung definiert, während er bei kleineren Feldstärken wechselndes Vorzeichen hat. Mit zunehmendem Längsfeld verschiebt sich das Auftreten der Instabilität von 2,5 μsec (0 Gauß) zu 3,7 μsec (1100 Gauß). Entsprechend nimmt die Zahl der Kontraktionen von 2 auf 5 zu. Das Auftreten der Kontraktionen und der Instabilitäten verschiebt sich mit zunehmendem Druck zu größeren Zeiten $(t \sim p^{3/11})$. Die Abnahme gewisser Schwankungen im Spannungsverlauf mit zunehmendem Feld läßt darauf schließen, daß die $(m=0)$-Instabilitäten bei höheren Feldern nicht mehr auftreten. Entladungen in verunreinigtem Deuterium zeigen ein völlig anderes Verhalten. Es tritt nur eine Plasmakontraktion auf, und Fluß- und Spannungsmessungen ergeben keine Anhaltspunkte für $(m=0)$- und $(m=1)$-Instabilitäten.

In einer früheren Arbeit [1] wurden Versuche mit Deuteriumentladungen beschrieben. Dabei ergaben sich bei Stromstärken von einigen 10^5 A und Stromanstiegen von etwa $6 \cdot 10^{11}$ A/sec $2-3$ Plasmakontraktionen, mit denen Neutronenimpulse verknüpft waren. Aus KERR-Zellenaufnahmen ließ sich entnehmen, daß im Anschluß an die Kontraktionsprozesse die Plasmasäule durch Instabilitäten zerstört wird. In der folgenden Arbeit wird über Versuche berichtet, diese Instabilitäten durch Messung des dabei auftretenden magnetischen Flusses nachzuweisen. Weiterhin wurde der Einfluß von longitudinalen Magnetfeldern auf den Entladungsablauf untersucht. Ebenso wie bei verschiedenen anderen Arbeiten (z. B. [2–4]) zeigte sich ein stabilisierender Einfluß des Längsfeldes auf den Pinch-Effekt.

Experimenteller Aufbau

Es wurde die gleiche Stoßanlage wie in der früheren Arbeit [1] benutzt (40 kV, 40 μF). Das Entladungsgefäß bestand aus einem Duranglaszylinder von 20 cm Durchmesser und 50 cm Länge. Den Stromrückleiter bildete ein geschlossener Kupferhohlzylinder. Der Druck im Entladungsgefäß betrug etwa $4 \cdot 10^{-2}$ Torr Deuterium. Der Restgasdruck an Verunreinigungen lag unter 10^{-5} Torr.

Das magnetische Längsfeld wurde durch eine mit Gleichstrom betriebene Spule erzeugt, die konzentrisch um das Entladungsgefäß angeordnet war. Durch zusätzliche Windungen an den Enden wurde der Feldverlauf etwas homogenisiert. Die Feldstärke entlang der Entladungsachse ist in Abb. 1 gezeigt. Sie konnte bis 1100 Gauß gesteigert werden.

[1] E. FÜNFER, H. HEROLD, G. LEHNER, H. TUCZEK u. C. ANDELFINGER, Z. Naturforschg. **13 a**, 524 [1958].

[2] A. L. BEZBATCHENKO, I. N. GOLOVIN, P. D. IVANOV, V. D. KIRILLOV u. N. A. YAVLINSKY, J. Nucl. Energy **5**, 71 [1957].

[3] L. C. BURCKHARDT, R. H. LOVBERG, G. A. SAWYER u. T. F. STRATTON, J. Appl. Phys. **29**, 964 [1958].

[4] S. A. COLGATE, J. P. FERGUSON u. H. P. FURTH, 2nd UN Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy (1958), Bericht Nr. A/Conf 15/P/369.